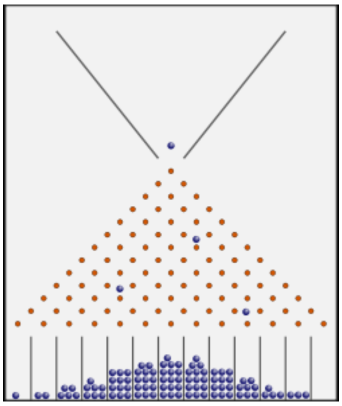
Objectifs :
- simuler une expérience aléatoire
- associer une loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire

A Expérience aléatoire de la planche de Galton

Issu d'une famille de scientifiques, Francis Galton (1822-1911) était le cousin de Charles Darwin et voulait justifier la transmission des possibilités intellectuelles par l'hérédité pour améliorer l'espèce humaine... Il s'intéressa à la géographie, la météorologie, l'anthropologie. Il fut l'un des pionniers en statistique, dans un but purement utilitaire. Ses travaux dans le domaine des statistiques restèrent cependant secondaires pour Galton, à côté de ses études sur l'origine des espèces. Il créa une planche à deux étages afin d'étudier les lois du hasard. Dans la planche de Galton, plusieurs billes tombent au travers d'une pyramide de clous sur une planche inclinée. En bas se trouvent des boîtes dans lesquelles tombent les billes. La bille finit sa trajectoire en tombant dans une des boîtes du bas.



Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a une chance sur deux de tomber d'un côté ou de l'autre. Elle a donc la même probabilité (p=0.5) de continuer sa chute à gauche ou à droite. Si nous réalisons l'expérience un grand nombre de fois (400 fois par exemple), les billes accumulées dans les boîtes forment ainsi un histogramme.

Animation visuelle de cette expérience.

Consulter sur internet une animation de l'expérience de la planche de Galton à l'adresse suivante :

B Simuler cette expérience à l'aide d'un algorithme

a) algorithme

Ecrire un algorithme qui simule l'expérience de la planche de Galton.

Indications :
- En entrée, on demandera le nombre de billes et la taille du triangle de Galton (n)
- On comptabilisera le nombre de fois où la bille se déplace vers la droite (ou la gauche) jusqu'à atteindre la dernière ligne du triangle.
  On pourra utiliser un tableau de taille n + 1 pour stocker ce nombre (l'indice du tableau étant le nombre de déplacement vers la droite pour une bille)
- On affichera les résultats sur la forme d'un histogramme des fréquences.

b) Implémentation et tests

Implémenter cet algorithme avec AlgoBox, une calculatrice programmable ou bien à l'aide d'Excel (VBA).Tester le programme avec n = 5 et nb_billes = 1000 ; puis avec n = 12 et nb_billes = 10 000.

Indications :

- Pour un programme AlgoBox :
  - utiliser une variable de type Liste pour comptabiliser le nombre de billes tombant dans chaque boîte.
  - Utiliser l'instruction TRACER_SEGMENT pour afficher l'histogramme.
- Pour un programme avec une calculatrice TI83 ou TI84 :
  - Utiliser les listes L_1 et L_2 pour comptabiliser le nombre de billes tombant dans chaque boîte.
  - Utiliser l'affichage graphique « Plot on » de type histogramme avec la liste L_1 qui contient les numéros de boîtes de 1 à n + 1.
    (On peut générer cette liste avec l'instruction seq(I,I,1,N+1) ➔ L_1)
    La liste L_2 contient les fréquences obtenues par la simulation
    On utilise alors XList : L_1 et Freq : L_2 dans « Stat Plot »
- Pour un programme avec une calculatrice TI-NSPIRE :
  - Les listes L_1 et L_2 sont créées en utilisant le tableur et en nommant les deux premières colonnes l1 et l2.

C Associer une loi de probabilité à cette expérience

On peut associer à chaque bifurcation d'une bille (à gauche ou à droite) un schéma de Bernoulli avec une probabilité de 0,5.
Les expériences sont indépendantes.
On numérote les boites recevant les billes de gauche à droite de 1 à n + 1.

1) A l'aide de quelle loi de probabilité peut-on alors modéliser cette expérience ?
2) Soit X la variable aléatoire qui associe le numéro de boîte dans laquelle la bille termine son parcours. Exprimer P(X = k) pour k entier compris entre 1 et n + 1.
3) Comparer l'histogramme obtenu à l'aide de la simulation avec celui de la loi de probabilité trouvée pour différentes valeurs de n et du nombre de billes lancées.

   Indications :

   - Avec Excel : utiliser la formule =LOI.BINOMIALE(k-1;n;0,5;0) pour calculer P(X = k) avec k le numéro de la boîte.
   - Avec une calculatrice TI83 ou TI84, utiliser : binompdf(N,0.5) ➔ L_3
     pour générer les N + 1 probabilités associées à la loi normale de paramètre N et 0,5 qui sont stockées dans la liste L_3.