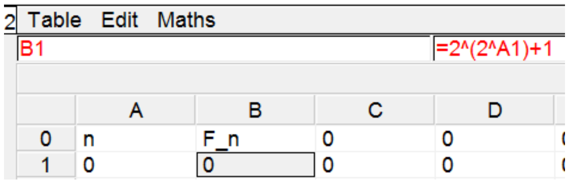
I Présentation et Objectifs

n désigne un entier naturel.

On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Chacun des nombres F_n est appelé **nombre de Fermat.**
Le but de ce TP est d'étudier des propriétés arithmétiques des nombres de Fermat.

II Expérimentation avec le logiciel XCas

1) Afin d'automatiser les calculs des nombres F_n, créer une feuille de calcul.
Pour cela on utilise Tableur/Nouveau Tableur.
2) Calcul des 20 premiers entiers F_n.
- Dans la colonne A, afficher les entiers n de 0 à 20. Pour cela entrer 0 dans A1 et = A1 + 1 dans A2 et recopier par glisser-copier vers le bas jusqu'à A21.
- Dans la colonne B, entrer dans B1 la formule permettant de calculer F_0 à savoir = 2^(2^A1) + 1, puis recopier vers le bas.



3) Pour les nombres F_n affichés, conjecturer le chiffre des unités de F_n suivant l'entier n.
4) Pour obtenir une conjecture au-delà des nombres F_n affichés, calculer dans la colonne C, le reste de la division euclidienne de F_n par 10.
   Pour cela entrer = irem(B1,10) dans C1 puis recopier vers le bas. La conjecture est-elle confirmée ?
5) Dans la colonne D, afficher le PGCD de F_n et F_{n+1}.
   Pour cela, entrer = gcd(B1,B2) dans D2 et recopier vers le bas. Que peut-on conjecturer ?

III Démonstration

1) Démontrer que pout tout entier naturel n, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.
2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$:
$$F_n \equiv 7 \pmod{10}.$$
3) n désigne un entier naturel.
   a) d est un diviseur à F_n et F_{n+1}. Démontrer que d divise 2.
   b) En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

IV Compléments

1) Nombres de Mersenne

p désigne un entier naturel. On pose $T_p = 2^p + 1$.
Le but de ce complément est de prouver que, hormis T_0, si T_p est premier alors c'est un nombre de Fermat.

a) Pour x réel, $x \neq -1$, calculer la somme : $S = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^p x^p$.
b) Démontrer que quels que soient les entiers naturels x et n, $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x + 1$.
c) En déduire que quels que soient les entiers naturels k et p, si k est impair, alors $\left(2^{2^p}\right)^k + 1$ est divisible par $2^{2^p} + 1$.
d) Conclure.

2) Nombres de Fermat et primalité

a) A l'aide de la commande *isprime()*, tester la primalité des 10 premiers nombres de Fermat F_n.
b) Pierre de Fermat en 1658 énonce la conjecture suivante : si p est premier alors F_p est premier.
Cette conjecture est fausse (C'est d'ailleurs la seule conjecture émise par Fermat qui se soit révélée erronée).
Donner un contre-exemple.