Meilleure approximation affine d'une fonction avec un tableur

Utilisation de la meilleure approximation affine de f en a

On suppose que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$f(0) = 1$ et, pour tout réel t appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(t) = 2 - t$

f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout réel a, on a l'approximation :

pour h voisin de 0, $f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$.

C'est-à-dire $f(a + h) \approx f(a) + (2 - a)h$

En prenant, par exemple, $h = 0{,}2$, on obtient successivement :

$f(0{,}2) \approx f(0) + 2 \times 0{,}2 = 1{,}4$ $\quad f(0{,}4) \approx f(0{,}2) + (2 - 0{,}2) \times 0{,}2 \approx 1{,}76$

$f(0{,}6) \approx f(0{,}4) + (2 - 0{,}4) \times 0{,}2 \approx 2{,}08$ etc …

En plaçant les points A_0 (0 ;1), A_1 (0,2 ;1,4), A_2 (0,4 ;1,76), A_3 (0,6 ;2,08) … et en traçant les segments joignant deux points consécutifs, on obtient une courbe C_g représentant une fonction g affine par intervalles qui constitue une approximation de la courbe C de f sur l'intervalle [0 ;2].

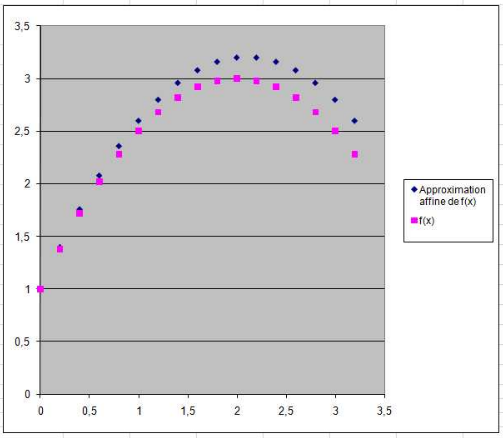
L'utilisation d'un tableur peut se révéler pertinente.

La valeur du pas h est écrite dans la cellule B1.

La cellule B5 contient la formule permettant de calculer $f(a) + (2 - a)h$, où a est la valeur contenue dans A4.

Pas 0,2

x	Approximation affine de f(x)	f(x)	Erreur
0	1	1	0
0,2	1,4	1,38	0,02
0,4	1,76	1,72	0,04
0,6	2,08	2,02	0,06
0,8	2,36	2,28	0,08
1	2,6	2,5	0,1
1,2	2,8	2,68	0,12
1,4	2,96	2,82	0,14
1,6	3,08	2,92	0,16
1,8	3,16	2,98	0,18
2	3,2	3	0,2
2,2	3,2	2,98	0,22
2,4	3,16	2,92	0,24
2,6	3,08	2,82	0,26
2,8	2,96	2,68	0,28
3	2,8	2,5	0,3
3,2	2,6	2,28	0,32



1) Représenter la courbe obtenue en prenant un pas de 0,1 ; puis un pas de 0,05.
2) Evaluation de l'erreur commise

   On peut démontrer que la fonction f est définie par $f(x) = -0{,}5\,x^2 + 2x + 1$

   En complétant la feuille de calcul du tableur, donner des valeurs approchées de l'erreur commise quand on remplace f(x) par son approximation g(x).

   Observer l'évolution de cette erreur si on modifie le pas.

Applications

Utiliser la méthode décrite ci-dessus pour établir dans un tableau les approximations de la courbe représentative de la fonction f dérivable sur l'intervalle I, les valeurs exactes de la fonction f , l'erreur commise et pour représenter les 2 courbes associées dans chacun des cas suivants :

a) I = [1 ;3] $\quad$ $f(1) = 0$ et, pour x dans [1 ;3], $f'(x) = \frac{3}{x}$.

   (On admettra que la fonction f correspondante est $f(x) = 3 \times \ln(x)$)

   ln désignant le logarithme népérien étudié en classe de Terminale)

b) I = [0 ;4] $\quad$ $f(0) = 0$ et, pour x dans [0 ;4], $f'(x) = \sqrt{x}$.