Les anciens Égyptiens ne connaissaient, comme rationnels, que les inverses d'entiers.
Il s'agit de décomposer un rationnel de]0 ; 1[en une somme d'inverses d'entiers strictement croissants.

On appelle fraction égyptienne toute fraction de numérateur égale à 1.

On s'intéresse aux décompositions des nombres rationnels $\frac{p}{q}$ comme somme de telles fractions où les dénominateurs sont des entiers naturels tous distincts.

I <u>L'art de décomposer</u>

Exemple 1 : décomposer $\frac{2}{7}$.

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

Or $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7\times 8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$; donc $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$

1) Exprimer une relation générale découlant de $\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7\times 8}$ à partir de $\frac{1}{n}$ = ...
   Démontrer cette relation.
2) Décomposer avec cette méthode $\frac{3}{7}$.
3) Un premier algorithme : proposer un algorithme en pseudo-code décomposant selon cette méthode une fraction du type $\frac{p}{q}$.

   <u>Idées générales de l'algorithme</u> :

Si p = 1 **alors**
  la décomposition est terminée : $\frac{1}{q}$
Sinon
  Transformer $\frac{p}{q}$ en p fractions $\frac{1}{q}$
  fin ← Faux
  Tant que non(fin) **Faire**
    Si deux fractions ont le même dénominateur **alors**
      conserver la première fraction
      transformer la 2$^{\text{ème}}$ fraction $\frac{1}{q}$ en $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q(q+1)}$
    Sinon
      Fin ← Vrai
    FinSi
  Fin TantQue
  Afficher la liste des fractions décomposées obtenues
FinSi

4) Implémenter cet algorithme sous AlgoBox et le tester avec $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{23}$.

II Un algorithme efficace

Tout nombre rationnel peut être décomposé selon la méthode précédente.
Cette méthode est simple, mais a le défaut de ne pas économiser le nombre de fractions égyptiennes utilisées. Ainsi, nous pouvons trouver une décomposition de $\frac{3}{7}$ en trois fractions suivantes : $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$.

Un algorithme plus efficace pour décomposer un nombre rationnel x consiste à considérer le plus petit entier n supérieur à $\frac{1}{x}$, puis à recommencer sur la différence $x - \frac{1}{n}$.

Exemple : Pour décomposer $\frac{3}{7}$, cela donne successivement :

- le plus petit entier supérieur à $\frac{7}{3}$ est 3

  $\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$
- le plus petit entier supérieur à $\frac{21}{2}$ est 11.

  $\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}$

On obtient la décomposition : $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

1) Ecrire l'algorithme correspondant en pseudo-code ; l'implémenter avec AlgoBox et le tester avec $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{23}$.
2) Une preuve de cet algorithme : une **descente infinie**
   Considérons un nombre rationnel x tel que $0 < x < 1$.
   . Posons $x = x_1$ et n_1 le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{x_1}$.
   Définissons ensuite x_2 par $x = x_2 + \frac{1}{n_1}$ et n_2 le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{x_1}$, etc ..
   De façon générale, nous obtenons :
   $$x = x_p + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_{p-1}}$$
   Ecrivons x_p sous la forme d'une fraction irréductible, $x_p = \frac{r_p}{s_p}$. Nous avons donc :
   $$x_{p+1} = \frac{r_{p+1}}{s_{p+1}} = x_p - \frac{1}{n_p} = \frac{r_p}{x_p} - \frac{1}{n_p} = \frac{r_p n_p - x_p}{x_p n_p}$$
   a) A partir des propriétés suivantes de la fonction partie entière :
      - $E(x) \leq x < E(x) + 1$;
      - $x - 1 < E(x) \leq x$

Montrer que :

(i) (x_p) est une suite décroissante et tel que $0 < x_p < 0$.

(ii) $n_{p-1} < \frac{1}{x_p} \leq n_p$

(iii) $0 \leq r_p n_p - s_p < r_p$.

b) La fraction $\frac{r_{p+1}}{s_{p+1}}$ étant irréductible, on en déduit que $r_{p+1} < r_p$

On construit ainsi une suite décroissante d'entiers strictement positifs.

On en déduit qu'il existe p inférieur au numérateur de x tel que $r_{p+1} = 1$ et donc :

$$x = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p}$$

Cet algorithme permet donc de décomposer un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ en au plus p fractions égyptiennes.

III Des nombres pratiques

Lorsque le numérateur p est la somme de diviseurs distincts du dénominateur q, le nombre $\frac{p}{q}$ se décompose en fractions égyptiennes de dénominateurs inférieurs à q.

Un nombre q tels que pour tout p entier < q ; p est somme de diviseurs de q est appelé **un nombre pratique.**

1) Donner la liste 10 premiers nombres pratiques.
2) Décomposer la fraction $\frac{9}{20}$ en utilisant le fait que 20 est un nombre pratique.

IV Des multiples pratiques

Si le dénominateur d'un nombre rationnel n'est pas pratique, nous pouvons nous y ramener s'il possède un multiple pratique.

En reprenant le cas de $\frac{3}{7}$, on utilise le fait que 28 est pratique.

Donc $\frac{3}{7} = \frac{3\times 4}{28} = \frac{7+4+1}{28} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$.

Pour construire de tels multiples pratiques, nous disposons du théorème suivant :

Si q est un nombre entier et n un nombre entier pratique premier avec q tel que q < 2n, alors $q\times n$ est pratique.

Utiliser ce théorème pour décomposer $\frac{5}{23}$ en somme de trois fractions égyptiennes différentes de celles données par l'algorithme du II.

V Pour aller plus loin

1) Décomposition en trois

Les exemples étudiés montrent des décompositions eu au plus trois fractions égyptiennes. D'après l'algorithme décrit dans le paragraphe « Un algorithme efficace », c'est le cas pour les nombres rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ avec p = 1, 2 ou 3.

Cela semble également être le cas si p = 4 ou 5.

Cependant, personne n'a pu prouver ces conjectures.

Elles sont dues à Erdös pour la première et Sierpinski pour la seconde.

2) Un algorithme « pratique » pour déterminer des nombres pratiques

Pour déterminer si un nombre un pratique, on peut utiliser la caractérisation suivante :

Soit n un nombre qui admet c diviseurs est :

$d_1 = 1, d_2, \ldots, d_c$

n est pratique ⇔ Pour tout r compris entre 1 et c – 1, $\sum_{i=1}^{d} d_r \geq d_{r+1} - 1$

Utiliser ce théorème pour écrire un algorithme qui liste les nombres pratiques compris entre 1 et 1000.