Objectif : Etudier des suites permettant de trouver des approximations de racines carrées.

Comparer la vitesse de convergence de ces suites à l'aide d'un tableur.

A – Avec des suites adjacentes

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_0 = 0$ et $b_0 = 4$ définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

- Si $\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 \leqslant 3$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Si $\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 > 3$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

1) A l'aide d'un tableur, afficher les 20 premières valeurs de a_n et b_n, puis afficher une représentation graphique de ces valeurs.
2) Que peut-on conjecturer pour les deux suites ?
3) Démontrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
4) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.
5) Démontrer que (a_n) est une suite croissante et que (b_n) est une suite décroissante.
6) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.
7) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
8) Démontrer que la limite commune de (a_n) et (b_n) est $\sqrt{3}$.

B Suites de Héron

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$, avec $\alpha > 0$.

1) Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}^*_+$.
2) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Pour $\alpha = 3$ et $u_0 = 3$, afficher sur le tableur les 10 premiers termes de la suite.
   b) Démontrer que, pour tout $u_0 > 0$, $u_1 \geq \sqrt{\alpha}$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{\alpha}$.
   d) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. En déduire le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3) a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - \sqrt{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{\alpha})$
   b) En déduire par récurrence que $u_n - \sqrt{\alpha} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(u_1 - \sqrt{\alpha})$

C Vitesse de convergence

A l'aide du tableur dans le cas où $\alpha = 3$, comparer la vitesse de convergence vers $\sqrt{3}$ des suites (a_n) et (b_n) par rapport à la suite (u_n).