Seconde **Algorithme : Méthode de dichotomie pour résoudre une équation**

On se propose d'étudier et d'implémenter avec un tableur et AlgoBox une méthode particulière pour résoudre une équation : la dichotomie.

A – Dichotomie avec un tableur

Dans cette partie, nous allons utiliser un tableur pour déterminer un encadrement de l'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$.

1) On admet que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la calculatrice, vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et déterminer un encadrement de cette solution entre deux entiers consécutifs.

2) a) Ouvrir une feuille de calcul et remplir les cellules A1 et B1 comme indiqué ci-contre.

	A	B
1	x	f(x)
2		
3		

On veut construire le tableau de valeurs de la fonction f pour x compris entre les deux entiers trouvés précédemment et avec un pas de 0,1.
Quelle formule doit-on placer dans la cellule B2 pour obtenir l'image du nombre placé dans la cellule A2 ?
Construire ce tableau de valeurs et vérifier avec celui obtenu avec la calculatrice.
Quel nouvel encadrement peut-on alors donner pour la solution α ?
b) On veut maintenant obtenir un encadrement de α d'amplitude 0,01. Pour cela, on construit un nouveau tableau de valeurs en prenant cette fois comme première valeur de x la plus petite valeur de l'encadrement trouvé précédemment et pour pas 0,01.
Donner alors l'encadrement de α d'amplitude 0,01.
Dans cette question 2) on a appliqué une méthode qui s'appelle la méthode de balayage afin de trouver un encadrement de α d'amplitude 0,01. Cette méthode est efficace, amis il faut construire plusieurs tableaux de valeurs successifs.

3) Dans cette question, on va utiliser le tableur et la méthode de dichotomie (voir l'activité *GéoGebra* qui introduit cette méthode) pour déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,01.
Pour cela on organise la feuille de calcul comme ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)	amplitude
2	0	1	2					

a) Quelle formule faut-il entrer dans la cellule D2 pour obtenir le centre de l'intervalle [1;2] ?
b) Quelle formule faut-il entrer dans la cellule E2 pour obtenir l'image de 1 par f ?
Ecrire des formules similaires pour calculer f(b) et f((a+b)/2).
c) Quelle formule faut-il entrer dans la cellule H2 pour obtenir l'amplitude de l'intervalle [1;2] ?
d) Dans la cellule B3, écrire la formule : =SI(E2*G2<0;B2;D2).
Que fait cette formule ?
e) De même, quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 pour que le logiciel affiche le contenu de C2 ou de D2 suivant le résultat à un test bien choisi ?
f) En utilisant une recopie vers la droite et vers le bas, construire le tableau jusqu'à la valeur n = 10.
g) En observant, ce tableau jusqu'à quelle valeur de n faut-il aller pour obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,01 ?

4) En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection des courbes représentant la fonction carré et la fonction homographique $h(x) = -3 + \frac{5}{x}$.

B – Algorithme et programme AlgoBox

1) En s'inspirant de la partie A, proposer un algorithme rédigé en pseudo-code qui utilise la méthode par dichotomie pour résoudre une équation de type f(x) = 0.
   On se donne une fonction strictement monotone sur un intervalle [a;b] et une précision souhaitée pour la solution approchée donnée par l'algorithme de l'équation f(x) = 0.
2) Implémenter cet algorithme avec AlgoBox et tester le programme avec l'exemple de la partie A puis avec l'équation : $-x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

C – Solutions exactes et un peu d'histoire des mathématiques sur les équations polynomiales.

Vous apprendrez en classe de Première comment résoudre les équations polynomiales de degré 2. Patience !!

L'équation $x^3 + 3x - 5 = 0$ est une équation du troisième degré.
La **méthode de Cardan**, proposée par Jérôme Cardan dans son ouvrage *Ars Magna* publié en 1545, est une méthode permettant de résoudre toutes les équations polynomiales du troisième degré. Cependant, Cardan se serait approprié la méthode en la volant délibérément à Niccolò Fontana dit Tartaglia (« Le Bègue »).
En utilisant cette méthode, on trouve la valeur exacte de α :

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{29}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{5-\sqrt{29}}{2}} \approx 1{,}15417.$$

Pour comprendre les principes de la méthode dite de Cardan vous aurez besoin de notions étudiées en classe de Terminale.

Un autre mathématicien Evarist Galois a montré (dans les années 1830) que toutes les équations polynomiales de degré supérieur à 4 ne peuvent pas être résolues par radicaux.