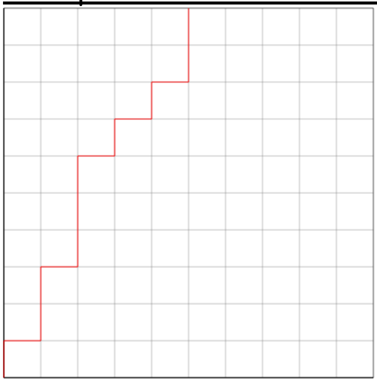
Objectif : On cherche à étudier une marche aléatoire sur un quadrillage carré de côté de longueur entière n et notamment estimer la longueur moyenne d'un déplacement à l'aide d'un algorithme puis à calculer précisément cette longueur moyenne.

I Approche algorithmique

a) Premier algorithme

Ecrire un algorithme qui simule une marche aléatoire sur un quadrillage carré de taille 10 et implémenter cet algorithme avec AlgoBox.
On part de l'origine O(0;0)
Les déplacements s'effectuent au hasard soit d'une unité vers la droite soit d'une unité vers le haut.
On s'arrête lorsqu'on atteint le bord haut ou droit du quadrillage.
Exemple d'une marche aléatoire :



b) Deuxième algorithme : simulation de plusieurs marches aléatoires

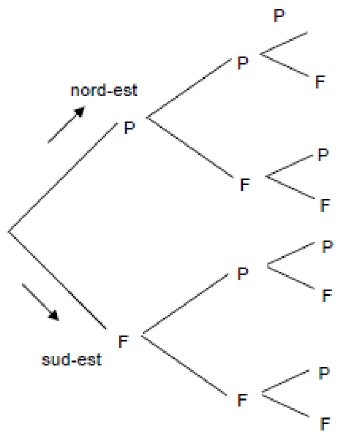
On décide d'évaluer la longueur moyenne du parcours d'une marche aléatoire.
Pour cela, on simule un nombre donné de marches aléatoires du type précédent et calcule ma moyenne des longueurs de parcours de chaque marche aléatoire.
Ecrire un algorithme basé sur le précédent qui applique cette démarche et écrire le programme AlgoBox associé.

Quel est le nombre moyen des longueurs de parcours ?

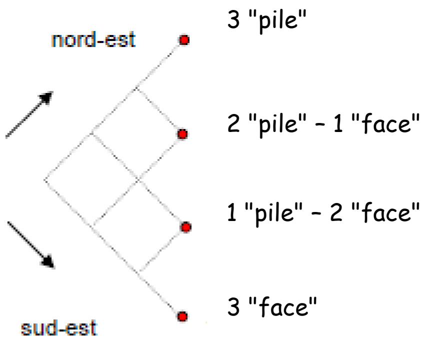
II Approche mathématique à l'aide des coefficients binomiaux

a) De l'arbre au quadrillage

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.
Il est d'usage de schématiser les huit issues de cette expérience aléatoire par les huit trajets dans un arbre tel que celui représenté ci-contre.
Sur le schéma, et pour chaque lancer, on a codé « P » pour « pile » et « F » pour « face ».
On peut convenir d'orienter la branche de l'arbre vers le nord-est pour chaque résultat « pile », vers le sud-est pour chaque résultat « face ».



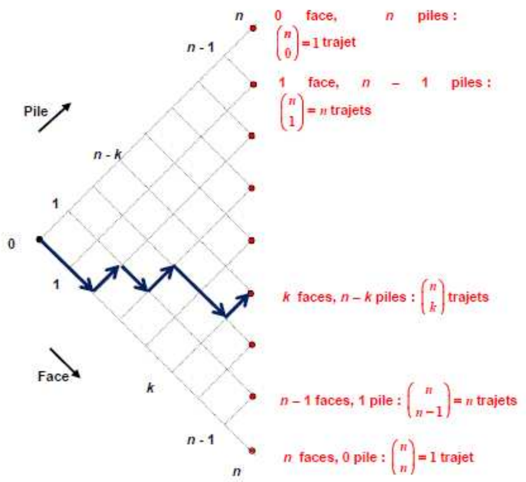
On peut envisager une simplification, toujours avec la même convention : chaque déplacement vers le nord-est schématisé un résultat « pile », chaque déplacement vers le sud-est schématisé un résultat « face ».



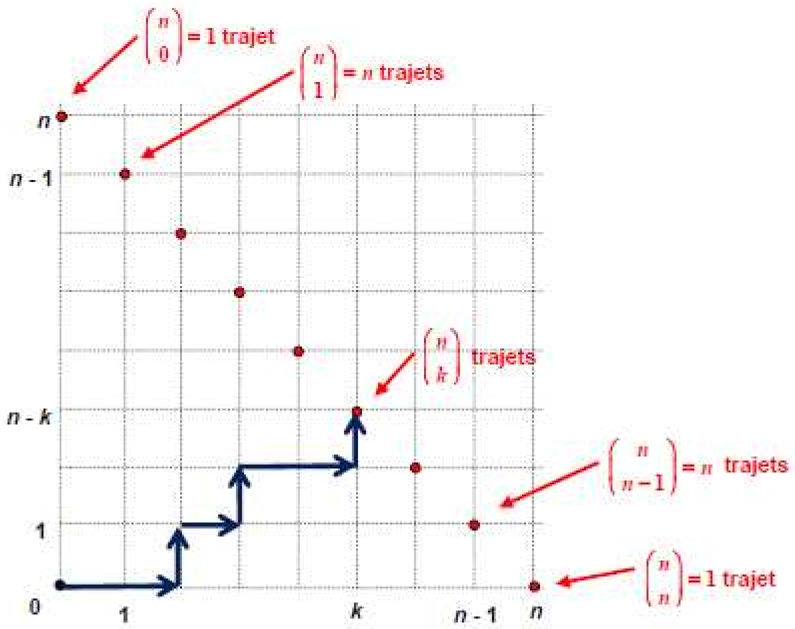
L'arbre obtenu pour la même expérience aléatoire n'a plus que 4 terminaisons au lieu de 8. Toutes les issues donnant le même

nombre de « pile » et de « face » correspondent en effet à plusieurs trajets qui aboutissent à une unique terminaison.
On retrouve ainsi, par exemple, qu'il y a trois trajets donnant 1 « face » et 2 « pile », les trajets étant limités aux deux directions précédentes.

Généralisons cela à *n* lancers ($n \geq 1$).
La variable *X* qui comptabilise le nombre de « face » suit une loi binomiale de paramètres *n* et 0,5.
L'arbre correspondant aura n + 1 terminaisons correspondant au résultat « *k* faces, *n* – *k* piles », c'est-à-dire à l'événement {X = k}, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On sait que : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
Chaque trajet a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Il en résulte que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de trajets aboutissant à la terminaison {X = k} est égal à $\binom{n}{k}$.



Faisons tourner la figure de 45° dans le sens trigonométrique : les nœuds du schéma précédent deviennent des points à coordonnées entières dans un repère orthogonal « naturel ».



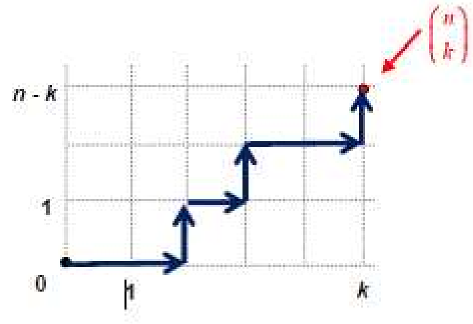
Les trajets considérés sont ceux partant de l'origine et aboutissant aux points de coordonnées $(k, n-k)$, en suivant toujours les directions vers la droite ou vers le haut (l'un d'entre eux est représenté sur la figure).

Interprétation des coefficients binomiaux

Retenons le résultat suivant :

Le nombre $\binom{n}{k}$ représente le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées (k, n – k), en suivant toujours les directions vers la droite ou vers le haut.

L'un de ces trajets est représenté ci-contre.



b) Retour au problème de la marche aléatoire

On prendra ici n = 4.

Calculons le nombre de chemins pour aller de (0,0) à (k,4).

Il y en a : $\binom{4+k}{k}$

Cependant, il faut retrancher à ce nombre le nombre de chemins pour aller de (0,0) à (k-1,4).

Soit $\binom{k+3}{k-1}$

Le nombre de chemins pour aller de (0,0) à (k,4) en tenant compte des bords du carré est donc :

$\binom{4+k}{k} - \binom{k+3}{k-1} = \binom{k+3}{k}$ d'après la formule de Pascal.

De même pour aller de (0,0) à (4;k), on a le même nombre de chemins possibles.

Les longueurs des chemins possibles vont de 4 à $2\times4 - 1 = 7$.

Soit X la variable aléatoire qui correspond à la longueur d'un chemin : 4 + k.

La longueur d'un chemin étant de 4 + k, étant donné que deux choix sont possibles (à droite ou en haut) pour chaque déplacement, le nombre de déplacements est donc 2^{k+4}

On a donc $P(X = 4 + k) = \dfrac{2\times\binom{k+3}{k}}{2^{k+4}} = \dfrac{\binom{k+3}{k}}{2^{k+3}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel (comme Xcas) que :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{k+3}{k}}{2^{k+3}} = 1$$

```
sum(comb(k+3,k)/2^(k+3),k,0,3)
1
```

La longueur moyenne correspond à l'espérance de la variable aléatoire X.

$$\text{Soit } E(X) = \sum_{k=0}^{4} (4 + k)\times\frac{\binom{k+3}{k}}{2^{k+3}} = \frac{93}{16} = 5{,}8125$$

```
12 sum((k+4)*comb(k+3,k)/2^(k+3),k,0,3)
                                                   93
                                                   --
                                                   16
```

On vérifie à l'aide du programme AlgoBox (avec n = 4) :

```
***Algorithme lancé***
5.816
***Algorithme terminé***
```

<u>Tester le programme AlgoBox avec n = 10 et comparer le nombre moyen du trajet à l'aide de Xcas.</u>

III Un deuxième exemple lié à une marche aléatoire : le problème des pilules

Argan se croit malade, il doit prendre $2n$ pilules dans la journée. Il dispose de deux boîtes identiques A et B et, chaque matin, il place n pilules dans chacune de ses deux boîtes. À chaque prise, il choisit une des deux boîtes de façon équiprobable, puis prend tant que c'est possible une pilule dans la boîte choisie. Au bout d'un certain temps l'une des boîtes est vide.
Combien l'autre boîte contient-elle de pilules en moyenne à ce moment-là ?

a) Algorithme

Ecrire un algorithme et un programme AlgoBox associé inspiré des précédents.
Donner alors une estimation de la réponse à la question posée pour n = 5 puis n = 10.

b) Etude mathématique confirmée par un logiciel de calcul formel

En s'inspirant de la partie II b) établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant au nombre de pilules restant dans une boîte dès que l'autre est vide.

Vérifier les résultats fournis par le programme AlgoBox avec un logiciel de calcul formel comme Xcas.