Paradoxe de Saint Pétersbourg

Formulé par Nicolas Bernoulli en 1713, ce problème a été approfondi par son cousin Daniel Bernoulli dans l'ouvrage *Les transactions de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, ce qui lui a valu son nom.

Énoncé

Un joueur joue contre la banque au jeu de « pile ou face », en misant toujours sur «face ».
Il adopte la stratégie suivante : il mise un euro au premier coup, et s'il perd, double la mise au coup suivant, tant que «face » ne sort pas. S'il gagne, il récupère sa mise augmentée d'une somme équivalente à cette mise. Le joueur dispose d'une fortune limitée, qui lui permet de perdre au maximum n coups consécutifs et, si « pile » sort n fois de suite, le joueur ne peut plus miser et arrête le jeu. La fortune de la banque, elle, n'est pas limitée.
Une partie consiste pour le joueur à jouer, si sa fortune le lui permet, jusqu'à ce que « face » sorte.
Il s'agit de déterminer la probabilité qu'a le joueur de gagner une partie, son gain algébrique moyen par partie, et d'analyser l'intérêt pour le joueur de jouer à ce jeu.

Traitement mathématique

Pour modéliser la situation, on suppose que le joueur lance la pièce n fois : si « face » sort avant le n-ième coup, le joueur ne mise rien les coups suivants. Lorsqu'il joue n fois de suite à « pile ou face », on note :

- A_n l'événement « le joueur obtient n piles » ; $G = \overline{A_n}$ l'événement : « le joueur gagne la partie » ;
- X la variable aléatoire qui comptabilise le rang de la première face, et l'on convient que ce rang est égal à 0 si « face » ne sort pas ;
- Y la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

On envisage d'abord le cas où le joueur dispose d'une fortune limitée, par exemple à 1000 €.

1) Comme le joueur double sa mise tant qu'il perd, déterminer combien de coups sa fortune de 1000 € lui permet de jouer de coups successifs.
   Indication : on pourra faire intervenir une suite géométrique de raison 2 et déterminer la somme de ces n premiers termes en fonction de n.
2) En déduire alors $P(A_9)$ puis de $P(G)$.
3) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi géométrique tronquée dont on donnera les paramètres n et p.
4) En déduire alors les probabilités $P(X = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 9$
5) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire Y.
   On pourra distinguer deux cas : soit "face" sort pour la première fois au k-ième coup (avec $1 \leqslant k \leqslant n$); soit "face" ne sort pas et calculer pour chaque cas le gain algébrique du joueur.
6) Justifier alors le tableau de probabilité suivant

Valeurs de Y	+1	$1 - 2^9$
Probabilités	$1 - \frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^9}$

   En déduire alors l'espérance de Y : E(Y)

Première S Loi géométrique tronquée

Paradoxe de Saint Pétersbourg

Simulation de 1000 parties en 9 coups au plus sur un tableur

On code la sortie de « face » par « 1 », celle de « pile » par « 0 ».

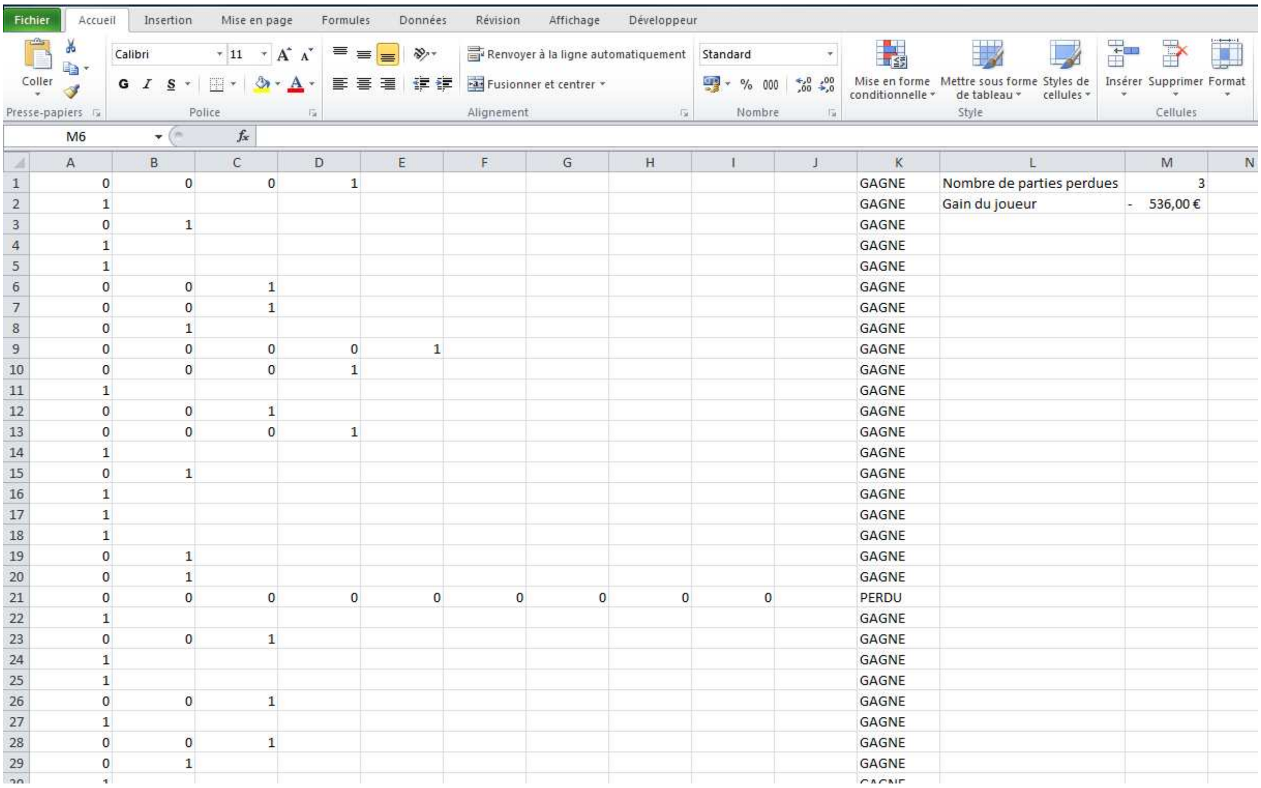
On place :

- en A1 la formule = ENT(ALEA())
- en B1 la formule = SI(OU(A1= 1;A="");"";ENT(2*ALEA()), que l'on recopie jusqu'en I1
- en K1 la formule =SI(SOMME(A1:I1)=0;"PERDU";"GAGNE")

Les formules précédentes sont recopiées jusqu'à la ligne 1000.

Il reste alors :

- à décompter en M1 le nombre de parties perdues avec la formule : =NB.SI(K1:K1000;"PERDU").
- à compter le gain algébrique en M2 avec la formule : =1000-M1-511*M1



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0	0	0	1							GAGNE	Nombre de parties perdues	3
2	1										GAGNE	Gain du joueur	- 536,00 €
3	0	1									GAGNE		
4	1										GAGNE		
5	1										GAGNE		
6	0	0	1								GAGNE		
7	0	0	1								GAGNE		
8	0	1									GAGNE		
9	0	0	0	0	1						GAGNE		
10	0	0	0	1							GAGNE		
11	1										GAGNE		
12	0	0	1								GAGNE		
13	0	0	0	1							GAGNE		
14	1										GAGNE		
15	0	1									GAGNE		
16	1										GAGNE		
17	1										GAGNE		
18	1										GAGNE		
19	0	1									GAGNE		
20	0	1									GAGNE		
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0		PERDU		
22	1										GAGNE		
23	0	0	1								GAGNE		
24	1										GAGNE		
25	1										GAGNE		
26	0	0	1								GAGNE		
27	1										GAGNE		
28	0	0	1								GAGNE		
29	0	1									GAGNE		

Conclusions de l'étude : deux paradoxes

7) Chaque partie gagnée rapporte 1 € au joueur.
   Si sa fortune était illimitée vers quelle limite tendrait sa probabilité de gagner.
   Que peut-on en déduire pour le joueur ?
8) Pourtant pourquoi peut-on affirmer que le jeu est équilibré ?
   En déduire alors un premier paradoxe.
9) Répéter plusieurs fois la simulation de 1000 parties avec le tableur.
   Quelle remarque peut-on établir concernant les gains ou pertes du joueur ?
   En déduire un second paradoxe.