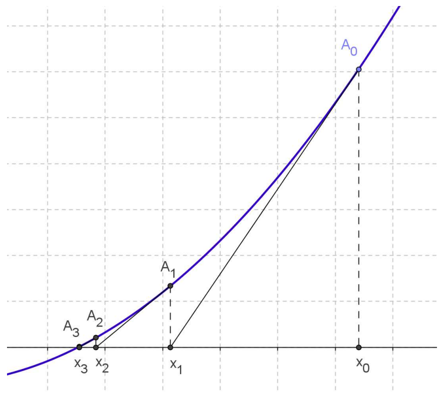
Première S TP Info : Applications de la dérivation

Algorithme de résolution approchée d'une équation f(x) = 0 par la méthode de Newton

A) Principe de la méthode de Newton

Soit f une fonction monotone sur un intervalle [a;b] qui s'annule sur cet intervalle et C_f sa représentation graphique dans un repère.

On suppose ici f croissante sur [a;b].



On pose $x_0 = b$.

Soit A_0 le point d'abscisse x_0 de C_f : $A_0(x_0;f(x_0))$.

On nomme x_1 l'intersection de la tangente à C_f en A_0 avec l'axe des abscisses.

Soit A_1 le point d'abscisse x_1 de C_f : $A_1(x_1;f(x_1))$.

On nomme x_2 l'intersection de la tangente à C_f en A_2 avec l'axe des abscisses.

En itérant le processus, on construit une suite de réels x_0, x_1, x_2,x_3, ….

On admettra que cette suite converge vers la solution de l'équation f(x) = 0 sur l'intervalle [a;b].

Cette méthode qui permet de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation f(x) = 0 sur un intervalle est appelée méthode de la tangente ou méthode de Newton.

B) Mise en équation de la méthode de Newton

1) A partir de l'équation de la tangente à C_f en A_0, établir une relation entre x_1, x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

   A quelle condition le nombre x_1 existe-t-il ?

2) En déduire une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.

C) Algorithme lié à la méthode de Newton

On se donne une précision à atteindre dans la recherche d'une valeur approchée de l'équation f(x) = 0 ainsi que la valeur initiale x_0.

Proposer un algorithme qui traduit le principe de la méthode de Newton.

D) Implémentation de l'algorithme avec AlgoBox

Ecrire le programme correspondant à l'algorithme précédent à l'aide d'AlgoBox.

E) Application à la résolution d'une équation polynomiale

On se donne la fonction polynomiale f définie par $f(x) = 4x^3 - 43x^2 - 130x + 120$.

On admet que f est croissante sur l'intervalle [10;15] et que l'équation f(x) = 0 admet une solution sur cet intervalle.

1) Utiliser le programme précédent pour obtenir une valeur approchée à 0,001 de la solution de f(x) = 0 sur l'intervalle [10;15].

2) On admet que l'équation f(x) = 0 admet deux autres solutions réelles sur ℝ.

   Utiliser le programme précédent pour déterminer des valeurs approchées de ces deux solutions.

3) Déduire des exécutions précédentes du programme une valeur décimale de l'équation f(x) = 0.

   En déduire une factorisation de f(x) ainsi que les 3 solutions exactes de l'équation f(x) = 0

   Comparer avec les valeurs approchées obtenues par le programme.

4) Vérification avec un logiciel de calcul formel

   Utiliser les fonctions *resoudre()* et *resoudre_numérique()* pour retrouver les résultats précédents.

   Exemple : resoudre_numerique(f(x)=0,x,15,newton_solver) pour demander à Xcas d'utiliser la méthode de Newton.